

## Olimpiada Națională de Matematică 2008

Etapa finală, Rm. Vâlcea, 22-25 mai 2008

### Clasa a V-a

**Subiectul 1.** Determinați toate numerele de cinci cifre, scrise în baza 10, cu proprietatea că fiecare cifră a numărului, începând cu cea a zecilor, este strict mai mare decât suma cifrelor scrise la dreapta sa.

*Cristian Mangra*

**Soluție.** Fie  $N = \overline{abcde}$ , astfel încât  $d > e$ ,  $c > d + e$ ,  $b > c + d + e$  și  $a > b + c + d + e$ .

Dacă  $e \geq 1$ , atunci  $d \geq 2$ ,  $c \geq 4$ ,  $b \geq 8$  și  $a \geq 16$ , fals, deci  $e = 0$ .

Cum  $d > e$ , rezultă  $d \geq 1$ . Presupunând  $d \geq 2$ , atunci  $c \geq 3$ ,  $b \geq 6$  și  $a \geq 12$ , fals, deci  $d = 1$ .

Întrucât  $c > d + e$ , rezultă  $c \geq 2$ . Presupunând  $c \geq 3$ , obținem  $b \geq 5$  și  $a \geq 10$ , fals, deci  $c = 2$ .

Prin urmare,  $N = \overline{ab210}$  și  $b \geq 4$ . Dacă  $b = 4$ , atunci  $a \geq 8$ , deci  $a \in \{8, 9\}$ . Dacă  $b = 5$ , atunci  $a = 9$ . Pentru  $b \geq 6$  nu se obțin soluții.

În concluzie,  $N \in \{84210, 94210, 95210\}$ .

**Subiectul 2.** Doi prieteni joacă biliard cu 9 bile, numerotate de la 1 la 9. Jocul decurge astfel încât, la un moment dat, fiecare dintre ei a introdus în buzunarele mesei de joc câte trei bile, iar trei bile au rămas pe masă. Unul dintre ei observă că cele trei cifre scrise pe bilele introduse de el pot forma un număr de 8 ori mai mare decât unul dintre numerele formate cu cele trei cifre scrise pe bilele introduse de adversarul său. Determinați suma numerelor scrise pe bilele rămase pe masă.

*Mircea Fianu*

**Soluție.** Fie  $a, b, c, d, e, f$  cifrele (distincte!) aflate pe bilele deja introduse; presupunem că  $\overline{abc} = 8 \cdot \overline{def}$ .

Atunci  $d = 1$ , pentru că, în caz contrar, ar rezulta  $\overline{def} > 200$ , de unde  $\overline{abc} > 8 \cdot 200 = 1600$ , fals.

Ca urmare,  $e \geq 2$ . Presupunând  $e \geq 3$ , rezultă  $\overline{def} > 130$ , de unde  $\overline{abc} > 8 \cdot 130 = 1040$ , fals. Deci  $e = 2$ .

Cum  $d, e, f$ , sunt distincte, rezultă că  $f \geq 3$ . Dacă  $f \geq 5$ , atunci  $\overline{def} \geq 125$ , de unde  $\overline{abc} \geq 8 \cdot 125 = 1000$ , fals. Deci  $f \in \{3, 4\}$ .

Dacă  $f = 4$ , atunci  $\overline{abc} = 8 \cdot 124 = 992$ , care nu convine, deoarece  $a$  și  $b$  sunt cifre distincte.

Dacă  $f = 3$ , atunci  $\overline{abc} = 8 \cdot 123 = 984$ , deci  $a = 9$ ,  $b = 8$ ,  $c = 4$ .

Ca urmare, pe masă au rămas bilele cu numerele 5, 6, 7, a căror sumă este 18.

**Subiectul 3.** Zece elevi primesc fiecare câte un cartonaș pe care este scrisă una dintre cifrele de la 0 la 9. Oricare doi elevi au cartonașe scrise cu cifre diferite. Determinați cel mai mare număr natural  $n$  pentru care cei zece elevi se pot așeza la o masă rotundă astfel încât, pentru orice elev, suma numerelor de pe cartonașul lui și cartonașele vecinilor săi să fie cel puțin  $n$ .

*Cristian Mangra*

**Soluție.** Un elev primește cartonașul cu cifra 9. Suma cifrelor de pe cartonașele celorlalți nouă este  $36 \geq 3n$ , adică  $n \leq 12$ .

Deoarece pentru  $n = 12$  se găsesc configurații valide; spre exemplu: 0, 9, 3, 7, 2, 5, 6, 1, 8, 4 sau 0, 9, 3, 2, 7, 6, 5, 1, 8, 4 etc., rezultă că  $n = 12$  este numărul căutat.

**Subiectul 4.** O mulțime de numere naturale nenule  $S$ , cu 4 elemente, se numește *completă* dacă orice element al ei este egal cu suma sau diferența altor două elemente distincte ale mulțimii  $S$ .

a) Arătați că orice multiplu de 13 se poate scrie ca suma elementelor unei mulțimi complete.

b) Aflați numărul submulțimilor complete ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, 50\}$ .

*Marius Perianu*

**Soluție.** a) Fie  $13n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , un multiplu de 13. Se demonstrează că mulțimea  $M = \{n, 3n, 4n, 5n\}$  este completă, iar suma elementelor lui  $M$  este  $13n$ .

b) Fie  $S = \{a, b, c, d\}$  o mulțime completă,  $a < b < c < d$ . Atunci  $a$  și  $b$  pot fi scrise doar ca diferența a două elemente distincte ale lui  $S$ , iar  $d$  poate fi scris numai ca suma a două elemente distincte ale lui  $S$ . Ca urmare,  $a \in \{c - b, d - b, d - c\}$ ,  $b \in \{c - a, d - a, d - c\}$ ,  $c \in \{d - a, d - b, a + b\}$ .

În plus,  $d$  nu poate fi  $a + b$ , deoarece în acest caz, ar rezulta  $c = b$  sau  $c = a$  sau  $c = d$ , deci  $d \in \{a + c, b + c\}$ .

◆ Dacă  $d = a + c$ , atunci  $b = c - a$ , deci  $S = \{a, b, a + b, 2a + b\}$  (★). Atunci  $2a + b \leq 50 \Rightarrow 3a < 50 \Rightarrow a \leq 16$  și  $a < b \leq 50 - 2a$ .

- pentru  $a = 1 \Rightarrow b \in \{2, 3, \dots, 48\} \longrightarrow 47$  mulțimi
- pentru  $a = 2 \Rightarrow b \in \{3, 4, \dots, 46\} \longrightarrow 44$  mulțimi
- pentru  $a = 3 \Rightarrow b \in \{4, 5, \dots, 44\} \longrightarrow 41$  mulțimi

- 
- pentru  $a = 15 \Rightarrow b \in \{16, 17, \dots, 20\} \longrightarrow 5$  mulțimi
  - pentru  $a = 16 \Rightarrow b \in \{17, 18\} \longrightarrow 2$  mulțimi

Așadar sunt  $2 + 5 + 8 + \dots + 44 + 47 = 392$  mulțimi complete de tipul (★).

◆ Dacă  $d = b + c$ , rezultă  $b = c - a$ , deci  $S = \{a, b, a + b, a + 2b\}$

(★★). Rezultă  $a + 2b \leq 50 \Rightarrow 3a < 50 \Rightarrow a \leq 16$  și  $a < b \leq \frac{50 - a}{2}$ .

- pentru  $a = 1 \Rightarrow b \in \{2, 3, \dots, 24\} \longrightarrow 23$  mulțimi
- pentru  $a = 2 \Rightarrow b \in \{3, 4, \dots, 24\} \longrightarrow 22$  mulțimi
- pentru  $a = 3 \Rightarrow b \in \{4, 5, \dots, 23\} \longrightarrow 20$  mulțimi
- pentru  $a = 4 \Rightarrow b \in \{5, 6, \dots, 23\} \longrightarrow 19$  mulțimi
- pentru  $a = 5 \Rightarrow b \in \{6, 7, \dots, 22\} \longrightarrow 17$  mulțimi
- pentru  $a = 6 \Rightarrow b \in \{7, 8, \dots, 22\} \longrightarrow 16$  mulțimi

- 
- pentru  $a = 15 \Rightarrow b \in \{16, 17\} \longrightarrow 2$  mulțimi
  - pentru  $a = 16 \Rightarrow b = 17 \longrightarrow 1$  mulțime

Obținem

$$1 + 2 + 4 + 5 + \dots + 22 + 23 = (1 + 2 + \dots + 24) - (3 + 6 + \dots + 24) = 192$$

mulțimi complete de tipul (★★).

În concluzie, mulțimea  $\{1, 2, \dots, 50\}$  are  $392 + 192 = 584$  submulțimi complete.